10.1.3 Spojitost funkce, limity funkce I

Předpoklady: 8301

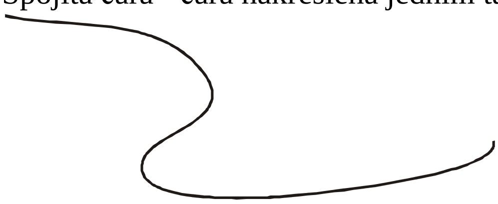
Pedagogická poznámka: Postup, který používám pro zavedení limit a spojitosti příliš neodpovídá tomu, co se píše v učebnicích, ale mě se rozhodně osvědčil. Studenti se ve dvou hodinách naučí, jak z grafů poznat jednotlivé druhy spojitostí a limit a tak mohou po zvládnutí definice spojitosti v bodě, sestavovat naprostou většinu definic sami.

Pedagogická poznámka: Pokud budete učit tuto hodinu podle této učebnice, chtěl bych Vás poprosit, abyste obrázky, na kterých jsou vysvětlovány nové pojmy buď kreslili na tabuli nebo promítali tak, abyste v nich mohli plynule ukazovat, jak se hodnoty *x* blíží k bodu a hodnoty *y* se blíží k jinému rukama. Tato hodina patří mezi ty, kdy je učitel opravdu nenahraditelný.

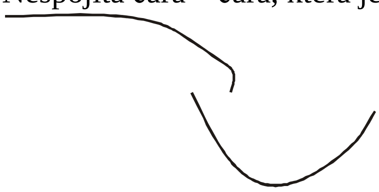
V této hodině se budeme snažit pochopit význam termínů spojitost funkce a limita funkce na příkladech (obrázcích). Naším cílem v žádném případě nebude přesné matematické popsání toho, jak je možné dokázat, že nějaká funkce spojitá je nebo není, či jakou má funkce v kterém bodě limitu.

Spojitost

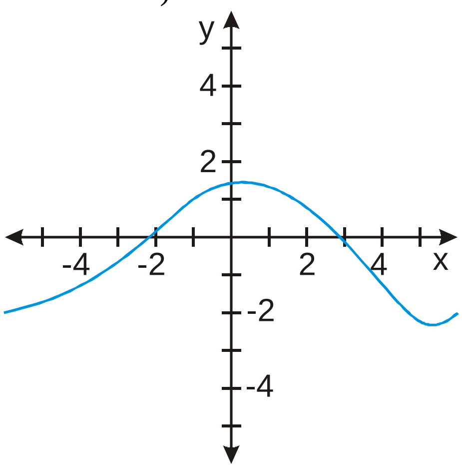
Spojitá čára - čára nakreslená jedním tahem:

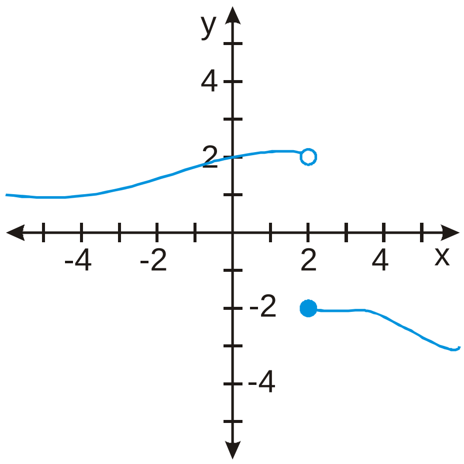


Nespojitá čára – čára, která je přerušená (napsaná dvěma nebo více tahy)



Stejným způsobem můžeme rozlišit spojitost funkce podle grafu (popravdě řečeno není to moc matematické).





Funkce je spojitá (lépe řečeno spojitá v každém bodě definičního oboru), protože čára jejího grafu není nikde přerušená.

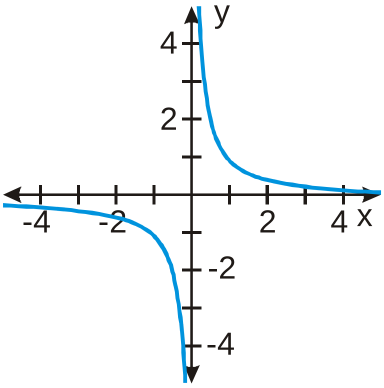
Čára grafu funkce je přerušená $\Rightarrow$ **funkce není spojitá**
přesněji: není spojitá v bodě $x = 2$ (v tomto bodě došlo k přerušení), v ostatních bodech spojitá je (tam čára přerušená není).

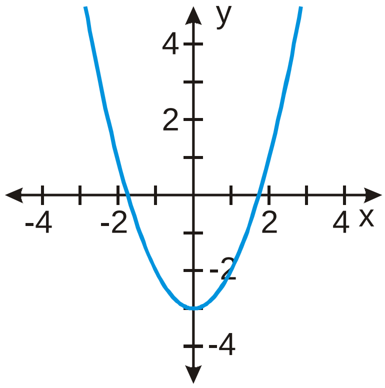
Situace na pravém grafu si zaslouží bližší prozkoumání:

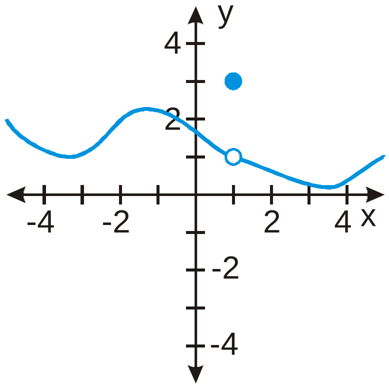
- pokud se budeme k bodu 2 blížit po čáře zprava, dostaneme se do bodu 2 aniž bychom museli přeskakovat přerušené místo $\Rightarrow$ **funkce je v bodě 2 spojitá zprava**
- pokud se budeme k bodu 2 blížit po čáře zleva, musíme přeskočit přerušené místo, abychom se do bodu 2 dostali $\Rightarrow$ **funkce není v bodě 2 spojitá zleva**

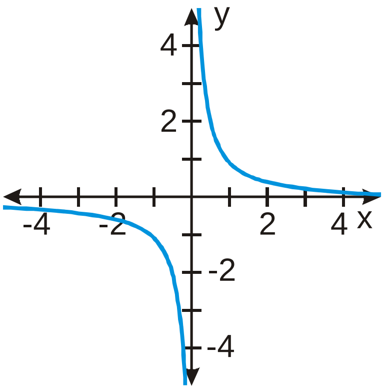
Pedagogická poznámka: U obou předchozích i všech následujících obrázků dochází k tomu, že někteří studenti až příliš pečlivě obkreslují každou (i nepodstatnou) drobnost (spíše než o neschopnost jde o zdržovací úmysly). Trvám na tom, že každý musí kreslení obrázků stíhat a vynechávání nepodstatných detailů je součástí jejich úkolu.

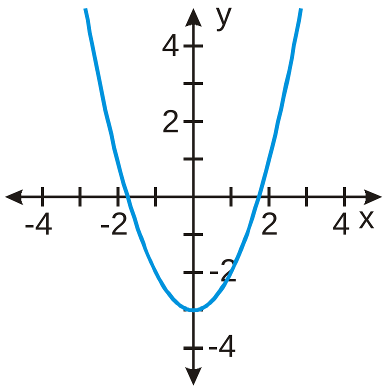
Př. 1: Rozhodni, zda jsou následující funkce spojité. Pokud jsou nespojité, najdi body nespojitosti a rozhodni, zda jsou v těchto bodech spojité alespoň zleva nebo zprava.

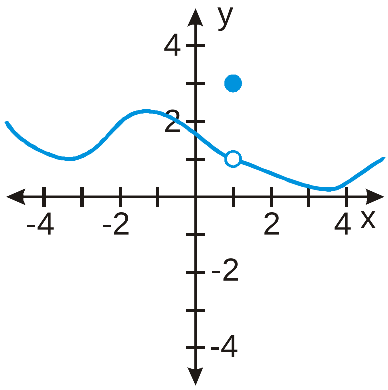












Není spojitá v bodě 0.
V tomto bodě není spojitá ani zleva ani zprava (nemá v něm vůbec hodnotu)

Je spojitá.

Není spojitá v bodě 1.
Hodnotu v tomto bodě má, ale není v něm spojitá ani zleva ani zprava.

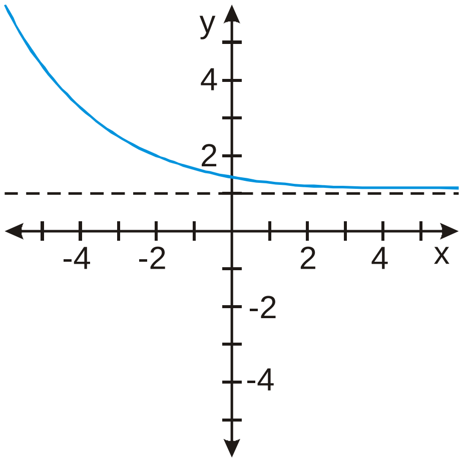
Limita

O limitě jsme už mluvili v kapitole o posloupnostech: $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=3$

- 1 vzhledem k rostoucímu *n* hraje jednička stále menší roli a zlomek se neustále přibližuje zlomku $\frac{3n}{n}=3$
- $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n+1}{n}}{\frac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1}=\frac{3+0}{1}=3$
- pokud uděláme kolem čísla 3 na ose *y* libovolně úzký pás, pokaždé najdeme takové *n*, že všechny hodnoty posloupnosti za a_n budou v tomto pásu ležet

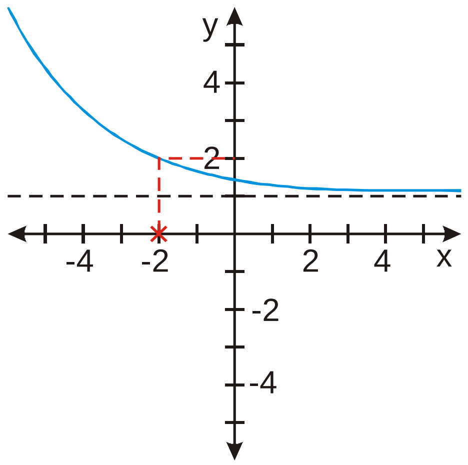
$\Rightarrow$ „hodnoty posloupnosti směřují k číslu 3 tak, že mezi posloupností a 3 nezůstane žádná díra“

Je rozumné mluvit o limitách u funkcí? Mohou se hodnoty funkcí k něčemu blížit?



- Hodnoty funkce se pro *x* jdoucí k nekonečnu blíží k 1 (stejná situace jako u posloupností) $\Rightarrow$ funkce má v nekonečnu limitu 1. Píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$.
- Pro funkci se může *x* blížit také k $-\infty$: hodnoty funkce pro *x* jdoucí k nekonečnu rostou nade všechny meze (blíží se k ∞) $\Rightarrow$ funkce má v mínus nekonečnu limitu ∞. Píšeme $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ (protože jde o nekonečno, budeme ji stejně jako u posloupností říkat nevlastní).

Je možné mluvit u funkcí i o jiných limitách než v ∞ a $-\infty$? Podíváme se na graf v nějakém bodě:



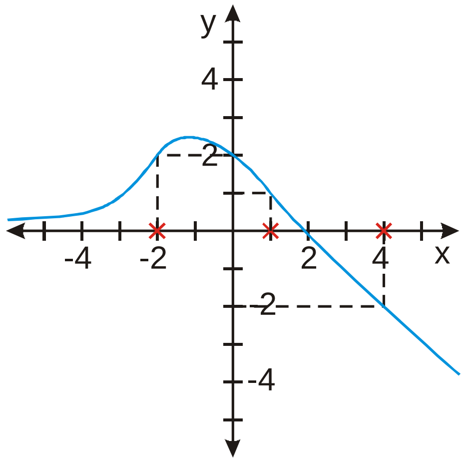
Když se hodnoty *x* blíží k –2, blíží se hodnoty *y* ke 2 (opět by se tam nenašly žádné mezery) $\Rightarrow$ funkce $f(x)$ má v bodě –2 limitu 2. Píšeme $\lim_{x\to-2} f(x) = 2$.

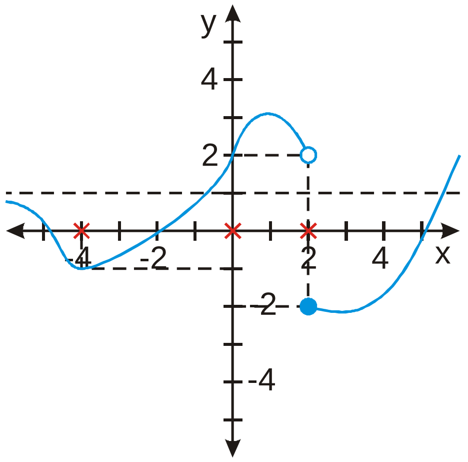
- limitu tohoto typu u posloupností nenajdeme (mezi body posloupnosti jsou díry)
- zdá se to zbytečné, protože u nakreslené funkce $f(x)$ najdeme podobnou limitu v každém bodě a vždy se bude rovnat funkční hodnotě, ale u méně hezkých funkcí to tak zbytečné není.

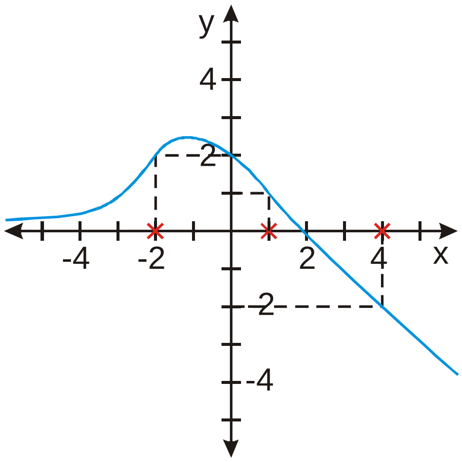
Abychom odlišili $\lim_{x\to-2} f(x) = 2$ od předchozích, říkáme jí **limita ve vlastním bodě** (do předpisu funkce opravdu můžeme dosadit číslo -2)
Limitám $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ říkáme **limity v nevlastním bodě** (nekonečna do předpisu dosadit nedokážeme).

Pedagogická poznámka: Při určování limit postupují studenti značně rozdílnou rychlostí. Pro rychlejší část studentů je připraven příklad 5, který jim přece jenom nějaký čas zabere.

Př. 2: U následujících funkcí urči limity v nevlastních bodech a limity ve vyznačených vlastních bodech.

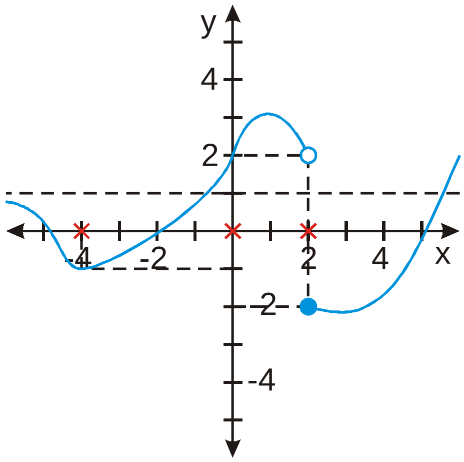






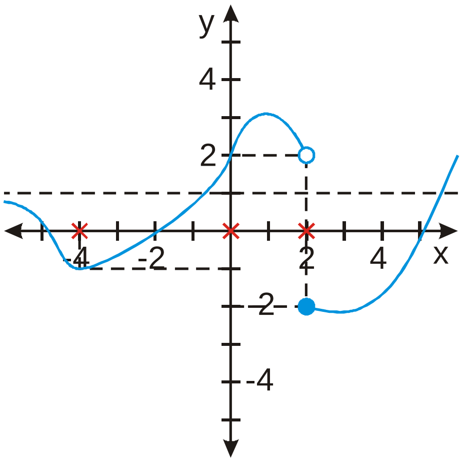
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-2} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to4} f(x) = -2$



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

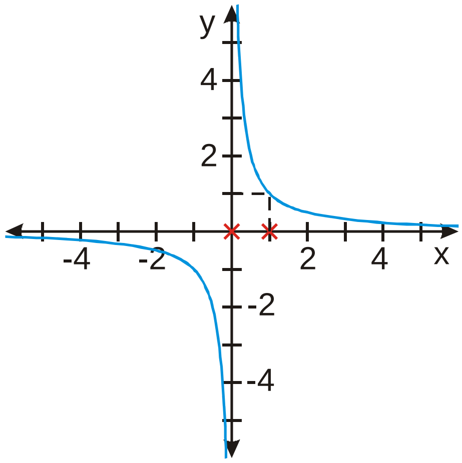
$\lim\limits_{x\to-4} f(x) = -1$ $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to2} f(x) = ?$

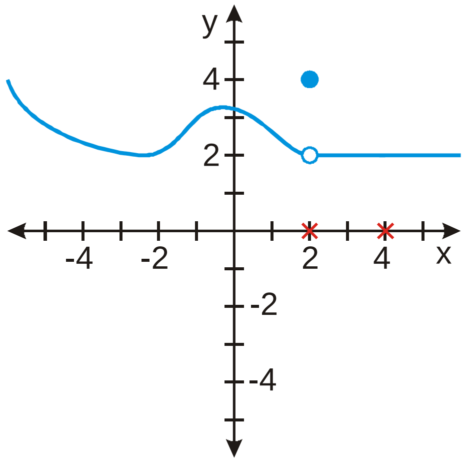


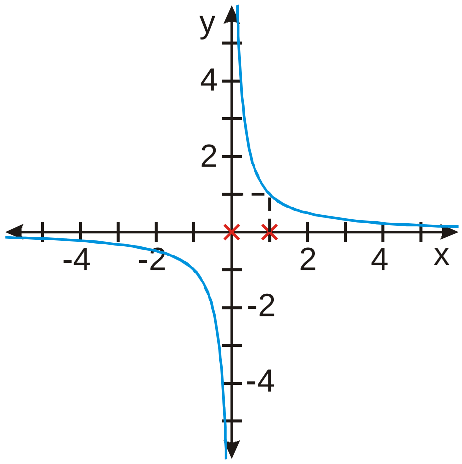
Situaci kolem bodu 2 si rozebereme podrobněji:

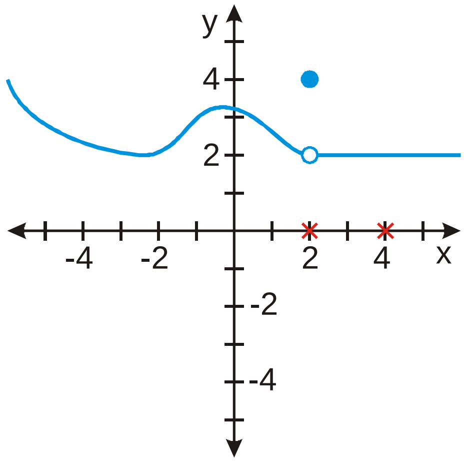
- pokud se k bodu $x = 2$ blížíme zprava (od větších hodnot), zdá se nám, že hodnoty *y* se blíží číslu –2 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -2$ (limita zprava v bodě 2 se rovná –2)
- pokud se k bodu $x = 2$ blížíme zleva (od menších hodnot), zdá se nám, že hodnoty *y* se blíží číslu 2 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 2$ (limita zleva v bodě 2 se rovná 2)
- protože při blížení k $x = 2$ z obou stran se v *y* blížíme k různým číslům, nemůže říct, že by se hodnota funkce $f(x)$ pro $x = 2$ blížila k nějakému číslu $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ neexistuje

Př. 3: U následujících funkcí urči limity v nevlastních bodech a limity ve vyznačených vlastních bodech. Pokud v nějakém z vyznačených bodů limita neexistuje, urči (pokud existují) jednostranné limity.









$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$

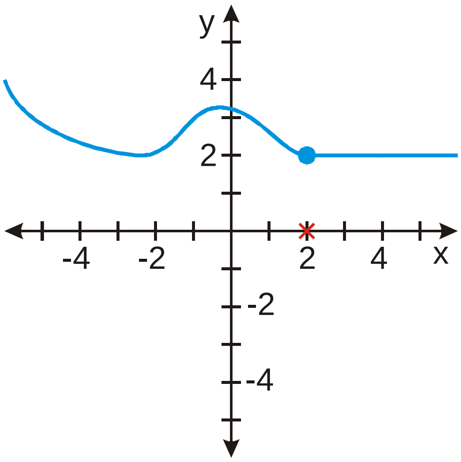
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to2} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to4} f(x) = 2$

Pedagogická poznámka: S $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 2$ má hodně studentů problém, plete je $f(2) = 4$, proto následuje další rozbor, který by měl nejasnosti odstranit.

Př. 4: Je možné změnit hodnotu funkce pro $x = 2$ na pravém obrázku z předchozího příkladu tak, aby:
a) funkce byla spojitá
b) neexistovala $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

a) pokud má být funkce spojitá, musíme odstranit její přetržení tím, že kolečko ucpe prázdné místo $\Rightarrow$ pokud bude $f(2) = 2$



b) není možné zvolit takovou funkční hodnotu, aby neexistovala $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, při libovolné volbě $f(2)$ budeme ve stejné situaci jako u předchozího příkladu (hodnota v bodě 2 vůbec neovlivňuje existenci limity v tomto bodě, limita je záležitostí hodnot okolo).

Hodnota $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ je dána tím, čemu se blíží hodnoty funkce, když se proměnná *x* blíží hodnotě *a* a proto vůbec nezávisí na hodnotě funkce v bodě *a* $f(a)$.
Spojitost funkce v bodě *a* naopak na hodnotě $f(a)$ závisí.

Př. 5: Najdi:
a) Vztah mezi spojitostí zleva, spojitostí zprava a spojitostí funkce v bodě.
b) Vztah mezi jednostrannými limitami a limitou ve vlastním bodě
c) Vztah mezi limitou ve vlastním bodě a spojitostí funkce v tomto bodě

z předchozích příkladů vyplývá:
a)
Funkce je v bodě *a* spojitá, právě když je v bodě *a* spojitá zleva i zprava.
b)
Funkce má v bodě *a* limitu, právě když platí $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
c)
Funkce je v bodě *a* spojitá, právě když $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Shrnutí: Spojitost (nepřetrženost) i limita (blížení se) jsou snadno pochopitelné z obrázků.